COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 4 heures)

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à écrire lisiblement, à respecter les notations de l'énoncé et à mettre en évidence les principaux résultats.

Toute affirmation NON CORRECTEMENT JUSTIFIEE sera considérée comme NULLE.

Notations

On considère les R-espaces vectoriels suivants :

E espace des fonctions réelles définies sur $[0,+\infty[$

E_o espace des éléments f de E continus sur $[0,+\infty[$ et admettant en 0 une dérivée à droite $f'(0^+)$

E_1 espace des éléments f de E continûment dérivables sur $[0,+\infty[$

E_2 espace des éléments f de E_1 deux fois continûment dérivables sur $]0,+\infty[$

On a donc : $E_2 \subset E_1 \subset E_o \subset E$

On définit l'application linéaire T de E_o vers E par :

$$F = T(f) \iff \begin{cases} F(0) = f(0) \\ F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \cos(x-t)\, f(t)\, dt \quad \text{si} \quad x \in]0,+\infty[\end{cases}$$

PARTIE 1

1.1 - a) - Ecrire en le justifiant un développement limité au premier ordre au voisinage de 0 de l'élément f de E_o.

b) - En déduire un développement limité au premier ordre au voisinage de 0 de F = T(f).

1.2 - Démontrer en précisant l'expression de F'(x) pour F = T(f) que Im T est inclus dans E_1.

1.3 - Déterminer Ker T.

1.4 - a) - Démontrer que tout élément F de E_1 est l'image par T d'un élément f de E_0 que l'on précisera.

b) - En déduire que T réalise un isomorphisme de E_0 vers E_1.

PARTIE 2

2.1 - Soit f un élément de E_0 et F = T(f). On suppose que f(x) admet la limite finie ℓ lorsque x tend vers $+\infty$. Démontrer que F(x) admet également une limite finie L que l'on précisera.

2.2 - Pout tout réel m on définit l'élément g_m de E par :

$$\begin{cases} g_m(0) = 0 \\ g_m(x) = x^m \quad \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

a) - Pour quelles valeurs de m a-t-on $g_m \in E_0$?

b) - Démontrer que si $0 \leqslant m < 2$ alors :

$\frac{1}{x} \int_0^x \cos(x-t)\, t^m \, dt$ a une limite, que l'on précisera, lorsque x tend vers $+\infty$.

c) - En déduire, pour $m \geqslant 2$, un équivalent de $T(g_m)(x)$ au voisinage de $+\infty$.

PARTIE 3

3.1 - Démontrer que si f est élément de E_1 alors T(f) est élément de E_2 et former une équation différentielle vérifiée par F = T(f).

3.2 - a) - Démontrer que si f est un élément de E_0 tel que T(f) = f alors f est un élément de E_2 solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle $x\,y'' + y' + x\,y = 0$

b) - Démontrer la proposition réciproque.

On pourra considérer une équation différentielle admettant pour solution sur $]0,+\infty[$ l'élément g de E_2 défini par $g(x) = x(T(f) - f)(x)$.

On ADMETTRA désormais que l'équation différentielle

$$x\,y'' + y' + x\,y = 0$$

admet dans E_2 une solution et une seule f satisfaisant aux conditions :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f'(0^+) = 0$$

PARTIE 4

4.1 - Déterminer une série entière, dont la somme J vérifie $J(0) = 1$, qui soit solution dans E_2 de l'équation $T(f) = f$

4.2 - On ADMETTRA que si g est une fonction indéfiniment dérivable sur R alors : $\dfrac{d^n}{dx^n}\displaystyle\int_0^\pi g(x \sin t)\,dt = \int_0^\pi \sin^n t.g^{(n)}(x \sin t)\,dt$

a) - Démontrer que TOUTE fonction g indéfiniment dérivable sur R telle que pour tout x de $[0,+\infty[$:

$J(x) = \displaystyle\int_0^\pi g(x \sin t)\,dt$

verifie :

$$\int_0^\pi (g'' + g)(x \sin t)\,dt = 0$$

b) - Donner un exemple de fonction g vérifiant les conditions du a).

PARTIE 5

J désigne la fonction déterminée dans la partie 4.

5.1 - a) - Démontrer que pour tout réel x positif ou nul on a :

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos xu}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

b) - Démontrer que J(x) tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (on pourra par exemple introduire $h \in]0,1[$ et majorer les intégrales sur $[h,1]$ et sur $[0,h]$)

5.2 - Montrer que $J(n\pi)$ a le signe de $(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra, par exemple, vérifier d'abord que l'on a :

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt = \int_0^x \cos(x-t).V_x(t)\,dt$$

où V_x est une fonction de la variable t dépendant du paramètre x.